EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas e Informática

TEMA 1

ESPACIOS VECTORIALES

MATRICES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Matrices

1) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, prueba que $M^n = 2^{n-1}M, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Demuestra la siguiente implicación: Si $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} \Rightarrow A^n = 0$

3) Obtén una matriz triangular superior aplicando sucesivas operaciones elementales (por filas) en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Formas reducidas o escalonadas de una matriz

1) Encuentra una sucesión de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que $E_k \ldots E_2 E_1 A$ sea una matriz en la forma reducida o escalonada más sencilla posible (forma canónica por filas o forma Echelon-Fila) y la matriz de paso correspondiente, donde:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ **c)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Halla el rango, mediante la reducción de matrices, de las matrices

$A_n=\begin{pmatrix} n+1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & n+1 \end{pmatrix}$ y $B_n=\begin{pmatrix} n+1 & 1 & n \\ 1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real n.

Estudio y resolución de sistemas lineales

3) Resuelve, por el método de eliminación de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ 2x+y-z=6 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+9y-5z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z+t=-2 \\ x-y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=-6 \\ x+y-z+t=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+y-z=10 \\ x-2y-z=-2 \\ -x+y+z=0 \\ 2x-y-3z=7 \end{cases}$

4) Estudia, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, la compatibilidad de los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros reales. Resuelve, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a^2x+ay+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+ay+a^2z=1 \end{cases}$

5) Elimina los parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas:

a) $\begin{cases} x_1 = 1+a \\ x_2 = 2+a \\ x_3 = 1-3a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 1-3a+b \\ x_2 = a-2b \\ x_3 = 2+b \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = a+2b+c \\ x_2 = b+c \\ x_3 = a+3c \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 = a+2b-c \\ x_2 = a-b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b+c \\ x_5 = a-b+2c \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 = a+b+2c \\ x_2 = a+2b+3c \\ x_3 = a+c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a-b \end{cases}$

Cálculo de la inversa de una matriz

6) Halla la inversa, si existe, mediante operaciones elementales (por filas) de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ecuaciones matriciales

7) Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$; encuentra todas las matices B∈M_{2x2} tales que AB=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, según el valor del parámetro real m.

8) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; e) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

Matrices, resolución de sistemas y eliminación de parámetros con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$:

9) Halla el rango y la forma escalonada más sencilla (forma canónica por filas) de las siguientes matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

10) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$:

$$\left\{ \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \bar{0} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_5} = \bar{0} \\ \overline{x_1} + \overline{x_4} + \overline{x_5} = \bar{0} \\ \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4} = \bar{0} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} + \overline{x_5} + \overline{x_7} = \bar{0} \\ \overline{x_3} + \overline{x_4} + \overline{x_5} + \overline{x_6} = \bar{0} \\ \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4} + \overline{x_5} + \overline{x_7} = \bar{0} \\ \overline{x_2} + \overline{x_4} = \bar{0} \end{array} \right.$$

11) Elimina los parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas en $\mathbb{Z}_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_2} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_3} = \bar{\beta} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_4} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_2} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_3} = \bar{0} \\ \overline{x_4} = \bar{\gamma} \\ \overline{x_5} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_2} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \\ \overline{x_3} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \end{array} \right.$$

Aplicaciones

12) Encuentra todos los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$ con coeficientes reales tales que:

a) $p(1) = 2$, $p(-1) = 4$, $p(3) = 16$ b) $p(1) = 0$, $p(-1) = 0$.

ESPACIOS VECTORIALES

Espacios vectoriales

1) En el conjunto $\Re^2$ se definen las operaciones siguientes:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix} \qquad a*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a\cdot\alpha_1\\ 0\end{pmatrix}$$

¿Es $\Re^2$ un espacio vectorial sobre $\Re$ respecto de las citadas operaciones?

Dependencia e independencia lineal

2) Estudia si los siguientes conjuntos de vectores de $\Re^3$ son linealmente independientes:

a) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $a\in\Re$

3) Estudia si los siguientes conjuntos de vectores de $\Re^3$ son linealmente independientes:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\}$

4) ¿Para qué valores de **a** el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\a\\0\end{pmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente?

5) Determina si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente dependientes. En caso afirmativo, determina una relación de dependencia y un subconjunto con un número máximo de vectores l.i.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Subespacios vectoriales y L({v_1, …, v_k})

6) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales?

a) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$/ y = 0}
b) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$ / x + y + z = 0}
c) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$/ x + z = 1}
d) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$/ x + z = 0}
e) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$/ x + z $\le$ 0}
f) S = { (x, y, z) $\in \Re^3$ / xy = 0}
g) S = {(a,b,1) / a, b $\in \Re$ }
h) S = {(a,0,b) / a, b $\in \Re$ }
i) S = {(a,b,c) $\in \Re^3$/ 3a = a+b+c }

7) Averigua si los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

8) Demuestra que los conjuntos $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de vectores de $\Re^3$ generan el mismo subespacio vectorial de $\Re^3$. Demuestra que el conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ no genera dicho subespacio.

9) En $\Re^4$ se considera el subespacio generado por los dos vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determina el valor de los escalares ***p*** y ***q*** para los que el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 3 \\ -q \end{pmatrix}$ pertenece al citado subespacio.

Base de un espacio vectorial

10) Halla una base del espacio vectorial generado por el siguiente conjunto de vectores
$\{v_1 = (3, 2, 0, 5), v_2 = (-1, 0, 3, -4), v_3 = (2, 2, 3, 1), v_4 = (0, 2, -9, 17)\}$.

11) ¿Para qué valores del número real **a** es base de $\Re^3$ el conjunto $\{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$?
Halla las coordenadas del vector $(-1, 1, 3)$ respecto del citado conjunto de vectores para $a = 2$.

12) En $\Re^4$ se consideran los vectores $(1 + a, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + a, 1, 1)$, $(1, 1, 1+a, 1)$ y $(1, 1, 1, 1 + a)$. Determina según los valores del parámetro **a** la dimensión y la base "más sencilla" del subespacio vectorial que generan. En los casos en que los subespacios vectoriales que se obtengan sean distintos de $\Re^4$, obtener ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

13) Demuestra que los vectores $\{(1,0,0,0), (1,-1,0,0), (1,-2,1,0), (1,-3,3,-1)\}$ forman una base del espacio vectorial $\Re^4$. Obtén las coordenadas del vector $(2,-3,1,2)$ respecto de la base anterior.

14) En $\Re^3$ se considera el conjunto $\{(1,0,0), (3,1,0), (9,6,1)\}$. Prueba que es base de $\Re^3$ y calcula las coordenadas del vector (a,b,c) respecto de dicha base.

15) Estudia si el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas es un subespacio vectorial de $\Re^4$ y en caso afirmativo obtén una base: a) $\left\{ \begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ x_3+x_4=0 \end{matrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ x_3+x_4=-1 \end{matrix} \right\}$.

16) Se considera el subespacio vectorial de $\Re^5$ de las soluciones del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-3t+w=0 \\ x+2y+z-4t-w=0 \\ y+z-2t-w=0 \\ x+z-2t-3w=0 \end{array}\right\}$$

Obtén un sistema de generadores, una base y la dimensión del citado subespacio

17) En $\mathfrak{R}^3$ se consideran $S_1 = \{(x, y, z) / x = -z\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) / x = z - y\}$.

a) Prueba que S_1 y S_2 son subespacios de $\mathfrak{R}^3$.
b) Encuentra una base B_1 de S_1. Calcula las coordenadas del vector $(x, y, z) \in S_1$ respecto de B_1.
c) Prueba que $B_2 = \{(0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es base de S_2.
Encuentra las coordenadas de $(-2, 1, -1) \in S_2$ respecto de B_2.

18) Halleauna base y la dimensión del subespacio vectorial M definido de la siguiente forma: $M = \left\{\begin{pmatrix} a+b+3c \\ 2a-b \\ -a-c \\ a+2b+5c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$.

Suma e intersección de subespacios

19) Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathfrak{R}^4$ definidos por

$$S = L\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\right), \quad T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} : \begin{cases} x-z-t=0 \\ y+z=0 \end{cases}\right\}$$

Obtén una base de los subespacios S + T y S $\cap$ T. Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas para los subespacios citados anteriormente.

20) En $\mathfrak{R}^4$ se consideran los subconjuntos:

$$S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x-y+z-t=0\right\} \text{ y } T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x = 2b \\ y = a+b \\ z = b \\ t = a \end{cases} \text{con } a,b, \in \mathbb{R}\right\}$$

a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales de $\mathfrak{R}^4$.
b) Obtén las ecuaciones implícitas y paramétricas de S y T.
c) Calcula S $\cap$ T y S + T dando bases más sencillas, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas (si existen) de ambos.

21) Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $V_1 = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-b\\a\end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}$ y $V_2 = \left\{\begin{pmatrix}c\\d\\e\\-c\end{pmatrix} : c,d,e \in \mathbb{R}\right\}$.

Halla una base de los espacios V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

22) Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathfrak{R}^3$ definidos por
$U = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / z = 0\}$, $W = L\{(0, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 2)\}$.
Obtén una base y la dimensión de los subespacios U, W, U $\cap$ W y U + W.

23) Sean S y T los subespacios vectoriales de $\mathfrak{R}^4$ definidos por
$S = \{(x, y, z, t) / x + y + z + t = 0, \quad 2x - y + 2z - t = 0, \quad 4x + y + 4z + t = 0\}$
$T = \{(x, y, z, t) / x = a + b + 2c, \quad y = b + c, \quad z = -a + b, \quad t = 3b + 3c\}$
Obtén una base y la dimensión de S, T, S + T y S $\cap$ T.

24) Dados los subespacios vectoriales de $\mathfrak{R}^4$:

S = L{(1, 0, 2, –1), (0, –1, 2, 0), (2, –1, 6, –2)} y T = L{(1, –1, 4, –1), (1, 0, 0, 1), (–1, –2, 2, 1)}. Demuestra que dim (S + T) = 3 y dim (S $\cap$ T) = 2.

25) Para cada $a \in \Re$ se considera el subespacio vectorial

V(a) = L{(1, a, 1, 1), (1, a, 1 – a, 0), (0, 1, 2a, 2), (1, 1 + a, 1 + a, 2)}

a) Halla una base de V(a).
b) Estudie si el vector (1, 1 + a, 1 + 2a, a + 3) $\in$ V(a) para algún $a \in \Re$.
c) Obtén las dimensiones de los subespacios V(0) + V(1) y V(0) $\cap$ V(1).

Suma directa de subespacios

26) En $\Re^3$ se consideran los subespacios:
U = {(x, y, z) $\in \Re^3$ / x = z }, V = {(0, 0, c) / c$\in \Re$} y W = {(x, y, z) $\in \Re^3$ / x + y + z = 0 }. Prueba que:
a) $\Re^3$ = U + V, b) $\Re^3$ = V + W, c) $\Re^3$ = U + W ¿En qué casos la suma es directa?

27) Se consideran los subespacios vectoriales de $\Re^3$:
S = L{(1, 0, 1), (1, 1, –1), (2, 1, 0)} y T = L{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (3, 0, –1)}.
Halla un subespacio U tal que $\Re^3 = S \oplus U$ y la suma T + U no sea directa.

28) Estudia si la suma de los subespacios vectoriales
S_1 = L{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 2), (0, –1, 2, –2)} y S_2 = L{(1, 1, 1, 0), (–1, –1, 1, –2)} de $\Re^4$ es directa. Halla una base del subespacio suma.

29) Halla una base del subespacio vectorial $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R} \right\}$ de $\mathbb{R}^4$. Amplía la base obtenida hasta formar una base de $\mathbb{R}^4$. Halla a continuación un subespacio suplementario de F.

30) Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:
V = L{(1,0,0,1), (1,1,1,0), (0,2,-1,0), (2,0,3,0) } y W = L{(1,0,3,-1), (1,4,1,-1), (0,2,-1,0) }. Demuestra que W $\subset$ V y halla un subespacio suplementario de W en V.

Espacios vectoriales generales

1) Sea S el s.v. de $\mathbb{Z}_2^5$ generado por el conjunto de vectores A = $\left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$. Encuentra una base del s.v. S formada por vectores de A. Encuentra la base más sencilla de S (es aquella cuyos vectores puestos en fila proporcionan una matriz en forma Echelon-fila). ¿Qué dimensión tiene S? ¿Cuántos vectores tiene S?.

2) En $\mathbb{Z}_2^4$ sea el s.v. S = $L\left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$. Halla las ecuaciones implícitas y paramétricas de S. ¿Qué dimensión tiene S? ¿Cuántos vectores tiene S?.

3) Sea S el s. v. de $\mathbb{Z}_2^3$ dado por las ecuaciones implícitas: $\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \bar{0}$. Halla las ecuaciones paramétricas y una base de S. ¿Qué dimensión tiene S? ¿Cuántos vectores tiene S?.

4) Sea S el s. v. de $\mathbb{Z}_2^7$ dado por las ecuaciones implícitas: $\begin{cases} \overline{x_1} + \overline{x_5} + \overline{x_7} = \bar{0} \\ \overline{x_4} + \overline{x_5} + \overline{x_6} = \bar{0} \\ \overline{x_2} + \overline{x_4} = \bar{0} \end{cases}$. Halla las ecuaciones paramétricas y una base de S. ¿Qué dimensión tiene S? ¿Cuántos vectores tiene S?.

5) Sea S el s. v. de $\mathbb{Z}_2^7$ dado por las soluciones del sistema homogéneo $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \\ \overline{x_4} \\ \overline{x_5} \\ \overline{x_6} \\ \overline{x_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$.

Halla las ecuaciones paramétricas y una base de S. ¿Qué dimensión tiene S? ¿Cuántos vectores tiene S?.

6) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales?
   a) S = {p(x) $\in P_3(\Re)$/ p(x) = $x^3 + ax + b$}
   b) S = {p(x) $\in P_3(\Re)$ / p(x) = $ax^3 + b$}
   c) S = {p(x) $\in P_3(\Re)$ / 3p(0) = p(1)}

7) Halla una base del subespacio vectorial F = $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \Re \right\}$ de $M_{2\times 2}(\Re)$. Amplía la base obtenida hasta formar una base de $M_{2\times 2}(\Re)$. Halla a continuación un subespacio suplementario de F.

8) Halla una base y la dimensión del subespacio vectorial M definido de la siguiente forma:

$$M=\left\{ \begin{pmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \Re \right\}.$$

9) Se consideran los subespacios de $M_{2\times 2}(\Re)$: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a,b \in \Re \right\}$ y $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} / c, d, e \in \Re \right\}$.
   Halla una base de los espacios V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

10) Sea $P_2(\Re)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y S={p(x)$\in P_2(\Re)$ / 3p(0)=p(1)}. Obtén ecuaciones implícitas y paramétricas de S, una base de S y un suplementario de S.